Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1

(*D'après Maths C, Banque PT 2020*)

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, au voisinage de a.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie I

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \; ; \qquad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction ϕ. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

   Tracer, sur un même graphique, sur la feuille de papier millimétré fournie, avec l'échelle : 3 cm pour une unité, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?
   Donner, à l'aide de la question précédente, une interprétation.

Partie II

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right).$$
3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x) = h\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin(\pi x).$$
5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$
6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$
7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Exercice 2

(D'après Maths C, Banque PT 2021)

Pour tout entier naturel n, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

On donne :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g est paire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.
3. Donner, pour tout entier naturel pair n, une relation entre I_n et J_n. Que vaut J_n si l'entier n est impair ?
4. Calculer I_1.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
6. Soit k un entier naturel. Montrer que :
$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et exprimer, en fonction de k : I_{2k+1}.

Exercice 3

(D'après Maths C, Banque PT 2018)

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$:
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
2. Que vaut : $\lim\limits_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\, t} \mathrm{d}t$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\, t} \mathrm{d}t = 0.$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t} \mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\, n\, t)}{t} \mathrm{d}t.$$

1. (a) i. Déterminer :
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t}.$$
   ii. Déterminer :
$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t}.$$
   iii. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

   (b) Que vaut I_1 ?

   (c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :
$$\sin((2\, n + 2)\, t) - \sin(2\, n\, t)$$
   en fonction de $\cos((2\, n + 1)\, t)$ et $\sin t$.

   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2. Étudier la convergence des intégrales J_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
3. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, associe
$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$
est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Que vaut : $\lim\limits_{n \to +\infty} \{J_n - I_n\}$? On pensera à utiliser le préambule.
5.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).

   (b) Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$
   (on pourra utiliser un changement de variable).

   (c) Que vaut :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad ?$$

Exercice 4

(D'après Maths A, Banque PT 2015)

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. (a) Calculer $f(e_1)$, $f^2(e_1)$.
   (b) Montrer que la famille $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est liée.
2. Montrer que même que la famille $\big(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\big)$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geqslant 0 & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = \mathrm{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que
   $$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$
   (c) On note $E'_x = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.
   (d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.
4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
5. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \hat{f}, \hat{f}^2, \ldots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
6. (a) Montrer que pour tout $k < p$,
   $$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\hat{f}^{p-1}(x_k).$$
   (b) En déduire que l'on a
   $$\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0 \,\mathrm{Id} = 0.$$

Nom :